DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

M A T H E M A T I Q U E S

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures

L'épreuve comporte un problème (noté sur 14) et un exercice (noté sur 6) totalement indépendants.

PROBLEME

NOTA : La partie II-1 est indépendante de la partie I.
La partie II-2 peut être résolue en admettant simplement l'existence de S_λ si elle n'a pas été établie en I.3.

I

λ est un paramètre réel et le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Un point du plan est déterminé par ses coordonnées (x,y). On se propose d'étudier la famille des courbes (C_λ) définies par une représentation paramétrique :

$$(C_\lambda)\quad \begin{cases} x = \dfrac{-2\lambda}{t(t^2+1)} + \dfrac{1}{t^2+1} \\ y = \lambda\,\dfrac{1-3t^2}{t^2(t^2+1)} + \dfrac{2t}{t^2+1} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}^* \text{ pour } \lambda \neq 0, \text{ et } t \in \mathbb{R} \text{ pour } \lambda = 0$$

I-1/ Etudier et construire C_0 (Il n'est pas interdit de changer de paramètre et de poser $t = u(\theta)$, u définie dans un domaine D tel que u est monotone sur D et a pour image $\mathbb{R}$).

I-2/ On suppose maintenant $\lambda \neq 0$, dans tout ce qui suit, jusqu'au II exclu. Montrer que C_λ admet deux tangentes parallèles à Ox. Déterminer et construire l'ensemble des points des courbes (C_λ) à tangente parallèle à Ox, quand λ décrit $\mathbb{R}^*$.

I-3/ Montrer que, quelque soit λ dans $\mathbb{R}^*$, (C_λ) admet un point stationnaire et un seul : S_λ .

t_0 choisi, déterminer l'ensemble des courbes (C_λ) telles que S_λ ait pour paramètre précisément t_0. En déduire l'ensemble des points S_λ, et construire cet ensemble.

I-4/ Ecrire l'équation de la tangente $M_\lambda(t)$ à (C_λ) sous la forme $y = mx + p$ où m et p dépendent de λ et de t. (On constatera que m ne dépend que de t.)

I-5/ Montrer que (C_λ) admet deux tangentes de direction donnée non parallèle à Oy, et qu'il existe une et une seule direction L_λ telle que ces deux tangentes soient confondues en une seule droite B_λ.

Donner, dans l'ordre qui vous conviendra le mieux :
l'équation de B_λ en fonction de λ.
l'équation dont les solutions sont les paramètres des points de contact de B_λ et C_λ, en fonction de λ.

Montrer que, quel que soit t_1 vérifiant $|t_1| \neq 1$, il existe une valeur et une seule de λ, notée λ_1, telle que $M_{\lambda_1}(t_1)$ soit l'un des points de contact de (C_λ) et B_λ.

En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points de contact de (C_λ) et B_λ. Donner x, et y, comme sommes d'éléments simples (fractions rationnelles de numérateurs de degré 0 ou 1, selon le cas, et dont les dénominateurs s'écrivent R^k, R polynôme premier, k entier naturel).

On ne demande pas l'étude de cet ensemble de points.

II

On adjoint au repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ un 3° axe, orthogonal à xOy, $(O,\vec{k})$ tel que $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé direct. Un point est maintenant repéré par ses coordonnées (x,y,z), et on suppose que (C_λ) est la projection sur xOy d'une courbe Γ_λ située dans le plan $z = \lambda$. La courbe (Γ_λ) engendre ainsi une surface Σ, qui coupe xOy selon (C_o). Un point de Σ sera repéré par sa côte λ et le paramètre t.

II-1/ Etudier les points de Σ de paramètre $t=t_o$ donné. En déduire que Σ est une surface réglée (c'est-à-dire une famille de droites). On notera G_{t_o} l'ensemble des points de paramètre $t = t_o$.

II-2/ Le point S_λ du I-3 est la projection d'un point Q_λ et de Γ_λ; Q_λ décrit la courbe W (ensemble des points de paramètres (t,λ_t) liés par la relation $\lambda_t = \dfrac{t^3}{3t^2+1}$.

Montrer sans calculs excessifs que la tangente en Q_{λ_t} à W est G_t, qu'en tout point de G_t le plan tangent Γ_t à Σ est le même, et qu'il est osculateur en Q_{λ_t} à W.

EXERCICE

Les matrices envisagées dans cet exercice sont réelles et carrées, à n colonnes.

On appelle transformation élémentaire sur l'ensemble $\mathcal{M}_n$ de ces matrices toute application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{M}_n$ qui :

soit permute deux colonnes
soit multiplie une colonne par un scalaire
soit ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.

1/ $t_1, t_2, .. t_p$ étant une suite finie de transformations élémentaires et $T = t_p o t_{p-1} o .. t_2 o t_1$, leur composée, montrer qu'il existe une matrice M telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n$, $T(A) = A.M$.

2/ Montrer que, $\forall$ A, $A \in \mathcal{M}_n$ il existe une suite finie de transformations élémentaires dont la composée T est telle que T(A) est triangulaire, puis dans l'hypothèse où A est inversible, une autre suite dont la composée T' est telle que $T' o T(A) = I$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_n$ Que vaut alors T'oT(I) ?

3/ Déterminer une suite de transformations élémentaires dont la composée T est telle que

$$T(A) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I$$ (on suppose ici que n=3), et en déduire la matrice inverse de A à l'aide de la question "2".

4/ Peut-on définir de même des transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice A, permettant de trouver A^{-1} quand elle existe par une méthode analogue à celle qui se dégage de la question "2" ?

5/ Peut-on utiliser dans une même suite des transformations élémentaires des colonnes et des lignes, et, ayant ainsi trouvé comme composée T, telle que $T(A) = I$, en déduire A^{-1} ? Justifiez avec soin votre réponse.
